Pensare in movimento in matematica: uno studio di caso

PENSARE IN MOVIMENTO IN MATEMATICA: UNO STUDIO DI CASO

Sommario

A partire da teorie nel campo della didattica della matematica che, studiando il ruolo del corpo in matematica, si focalizzano sulla natura dinamica dell'attività matematica, questo articolo indaga il ruolo del movimento sulla base dell'idea di "pensare in movimento" proposta da Sheets-Johnstone (2009, 2011). Questa idea permette di portare alla luce la natura co-costitutiva di pensiero e movimento in classe. A scopo esemplificativo, mi focalizzerò su un esperimento che ha coinvolto una classe quarta primaria in attività di modellizzazione grafica del movimento con il software WiiGraph e, in particolare, su un'intervista individuale con uno dei bambini. L'intervista esporrà la natura dinamica del pensiero matematico in questo contesto e per la costruzione di significati matematici.

Abstract

Starting from theories in mathematics education that, while studying the role of the body in mathematics, focus on the dynamic nature of mathematical activity, this paper investigates the role of movement drawing on the idea of "thinking in movement" by Sheets-Johnstone (2009, 2011). This idea helps to elucidate the co-constitution between moving and thinking in the classroom. To exemplify, I will focus on a pilot experiment which has involved a class of grade 4 students in graphing motion with WiiGraph, and in particular on the case of an individual interview with one child. The interview will expose the mobile nature of mathematical thinking in this context and in relation to mathematical meanings.

Giulia Ferrari

PENSARE IN MOVIMENTO IN MATEMATICA: UNO STUDIO DI CASO

Giulia Ferrari
Università degli Studi di Torino, Dipartimento di Matematica

Introduzione

Nella ricerca in didattica della matematica, a partire dagli anni 2000, un grande interesse è stato rivolto verso lo studio del ruolo del corpo nell'insegnamento e apprendimento della matematica. Su questa stessa rivista, Ferrara e Seren Rosso (2015) descrivono la "svolta all'attività corporea", in relazione agli approcci di ricerca che considerano una visione della conoscenza matematica come *embodied* e multimodale. Brevemente, questi due termini da un lato esprimono l'idea che anche i concetti matematici più complessi siano fondati nelle nostre esperienze corporee (*embodied*, ovvero, in una qualche misura, *incorporati*; Lakoff & Núñez, 2000); dall'altro, che i processi di apprendimento si dipanano attraverso molteplici modalità (Arzarello & Robutti, 2009) non solo cognitive, ma anche percettive, motorie, immaginative, e così via (Ferrara, 2014). Molta attenzione viene dunque rivolta al movimento del corpo durante l'attività matematica, ovvero, ad esempio, ai gesti, agli sguardi, ma anche al tono della voce e alla postura del corpo (ad esempio, Radford *et al*., 2009). Il fiorire delle ricerche che discutono della rilevanza e dell'importanza di questi aspetti per la didattica della matematica è anche andato di pari passo con una attenzione crescente verso la rottura dei cosiddetti dualismi mente-corpo, quei meccanismi tali per cui la dimensione corporea è vista come totalmente assoggettata a quella cognitiva. Tuttavia, alcuni di questi studi, rivolgendo l'attenzione al coinvolgimento corporeo degli studenti, corrono il rischio di ridurre i gesti (e il movimento più in generale) a un semplice indicatore di un qualche schema mentale già cognitivamente presente nell'individuo. In tal modo, si ricade nuovamente nel dualismo mente-corpo, invece di pensare e ri-

pensare l'attività corporea come costitutiva in modo autentico della costruzione di conoscenza (Nemirovsky *et al*., 2013).
In particolare, in questo lavoro ci rivolgiamo alla letteratura che, in didattica della matematica, si pone l'obiettivo di riconcettualizzare l'idea di una matematica *embodied*, proponendo prospettive che incorporano il ruolo del corpo nel fare matematica in modo scevro da ogni dualismo.
Il lavoro si inserisce in tale prospettiva e, in particolare, mette l'accento sulla relazione indissolubile tra i processi di pensiero e il movimento (ossia, tra il pensare e il muoversi) in matematica.
Abbracciando inoltre una visione dei concetti come mobili per loro natura, presenta uno studio di caso che intende esemplificare la natura dinamica dell'attività matematica. Lo studio di caso si basa su un breve estratto di un'intervista alla fine di una sperimentazione pilota. Questa ha preceduto tre sperimentazioni di medio termine in cui studenti di diversi livelli scolari sono stati coinvolti in esperienze di modellizzazione del movimento mediante rappresentazioni grafiche di relazioni spazio-temporali. Lo studio contestualizzerà l'esperienza nel panorama e nel contesto nazionale, proponendo infine alcune riflessioni e possibili ricadute sulla pratica didattica a partire da tali esperienze. Il lavoro dunque muove i suoi passi da una problematica di ricerca, che sarà introdotta nella sezione seguente, per aprirsi a collegamenti con la matematica a scuola (e a possibilità di ripensare a essa).

Aspetti teorici di riferimento

Movimento e pensiero matematico

Nella letteratura internazionale si ritrovano lavori che offrono una prospettiva sull'intreccio co-costitutivo tra pensiero e movimento (Roth & Maheux, 2015; de Freitas & Ferrara, 2015) in matematica. Roth e Maheux (2015) propongono un "approccio dinamico al pensiero matematico", studiando il flusso e la temporalità con cui alcuni matematici gesticolano e creano diagrammi. Nel cogliere questo dinamismo sottile che permea l'attività matematica, dicono gli autori, è possibile ripensare quest'ultima in termini di movimento,

ma senza ricondursi a schemi mentali. De Freitas e Ferrara (2015) offrono un approccio per il quale gli stessi concetti matematici sono mobili, ma la maggior libertà di movimento appartiene al pensiero, che nella classe di matematica attualizza il dinamismo dei concetti. Entrambe le prospettive, di grande rilevanza nell'ispirazione per questo lavoro, catturano un'idea di movimento che va oltre alla dinamicità della conoscenza in quanto processo e al movimento del corpo, per abbracciare il suo essere costitutivo del pensiero e fondante per la matematica stessa.
Si tratta di una visione che risuona fortemente con il punto di vista del matematico francese Châtelet (1993/2000) sulla virtualità dei concetti matematici. Torneremo su questo punto in seguito.
In questo lavoro, condivido con gli autori sopracitati un interesse profondo verso una visione della gestualità e del movimento del corpo come costitutivi dell'attività matematica e non semplici rappresentazioni dovute a schemi mentali. Inoltre, rivolgerò l'attenzione ai modi in cui il movimento del corpo e del pensiero possano essere caratterizzati e studiati nel contesto della classe di matematica, per abbracciare la complessità dell'idea di movimento nella sua elusività e profondità.

Pensare in movimento

L'articolo, in particolare, prende slancio dal considerare come il movimento e il pensiero siano due processi che si alimentano vicendevolmente e costantemente (nelle situazioni di pratica matematica). Questo è evidente – quanto ben elaborato – nel lavoro di Sheets-Johnstone (2009, 2011), studiosa di stampo fenomenologico che ha elaborato un'interessante prospettiva sul movimento. Nel suo libro "The primacy of movement" (la supremazia del movimento), Sheets-Johnstone (2011) rivendica la centralità del movimento nella nostra comprensione degli esseri animati in generale e dell'evoluzione e dello sviluppo dell'uomo in particolare. Seppure questo libro (e più in generale il lavoro della Sheets-Johnstone) non siano legati direttamente né alla didattica né alla matematica, pongono un punto importante per il nostro discorso:

l’esistenza di una co-costituzione tra pensiero, movimento ed emozioni. Il movimento, in questa prospettiva, non è solamente da intendersi come un mero “spostamento” fisico, ma è in modo fondamentale parte del nostro primo e primario modo di entrare in contatto con il mondo e di dare senso al mondo. Letteralmente, dice Sheets-Johnstone (2011), entriamo nel mondo, in quanto bambini, muovendoci, scalciando, stiracchiandoci, sorridendo, piangendo… e siamo quindi coinvolti nel movimento ancora prima di essere impegnati in precisi compiti che ci “muovono a muoverci”. Gli aspetti principali di questa prospettiva, che si vuole qui approfondire, sono essenzialmente due: l’idea del “pensare in movimento” (*thinking in movement*) e la dimensione qualitativa del movimento.

Brevemente, in relazione al “pensare in movimento” è significativo osservare che, sostiene Sheets-Johnstone (2011), nel movimento, non vi è una netta separazione tra il pensare di muoversi e il muoversi stesso. L’esempio che propone è quello di una ballerina che improvvisa una danza: i movimenti non scaturiscono dall’immaginare una sequenza di movimenti consecutivi per poi metterli in pratica, ma piuttosto alimentano i pensieri e le immagini che guidano i movimenti stessi; simultaneamente, i movimenti alimentano nuovi pensieri e immagini che la guidano nella danza. L’altro aspetto che caratterizza un movimento è la dimensione qualitativa che permea l’essere dinamicamente coinvolti nel muoversi. Sheets-Johnstone evidenzia le quattro strutture qualitative primarie del movimento: tensione, linearità, ampiezza e proiezione (ibid.). Queste quattro strutture sono esperite nel movimento, cioè non sono separate e separabili; in ogni caso, permettono di descrivere un movimento in modo analitico, dopo che questo è avvenuto. Ci danno inoltre la possibilità di descrivere le dimensioni nelle quali le variazioni di movimento possono avvenire: nel processo, secondo la ricercatrice, creiamo lo spazio intorno a noi attraverso la percezione cinestetica della tridimensionalità del movimento e di una certa dinamica spaziale che caratterizza ciascun movimento (*ibid.*).

Il movimento nella/della matematica

Non è solo il corpo a essere in movimento, ma la matematica stessa e i concetti sono in movimento, anche attraverso il corpo. Mi riferisco qui al lavoro del filosofo e matematico francese Châtelet (1993/2000) che, tra le altre cose, ha proposto una visione pedagogicamente interessante della mutua interazione tra gesti e diagrammi nella pratica matematica (si veda ad esempio, Sinclair et al., 2013). Châtelet considera i concetti come entità fisico-matematiche, ovvero esamina esempi dalla storia della matematica e della fisica per mettere in discussione la netta separazione tra le due discipline, come tradizionalmente avviene nella visione aristotelica. In questo modo, egli problematizza dal punto di vista ontologico la natura dei concetti matematici, proponendo che essi prendano parte nella dimensione virtuale del mondo materiale. In breve, il virtuale è in gioco quando concepiamo i concetti non come entità astratte e statiche, ma piuttosto in termini del loro potere generativo, la loro potenzialità di generare nuove configurazioni di significato. Châtelet fa l'esempio dei punti nel piano, che sono pensati come statici finché costretti a essere semplicemente espressi in coordinate spaziali, ma sono invece "esplosivi" nel momento in cui li si pensa come potenziali intersezioni tra curve o come poli di una funzione nel piano complesso[1]. Dal punto di vista pedagogico, questa prospettiva è interessante per il modo in cui pone l'accento sulla potenzialità e mobilità dei concetti matematici, aprendo le porte a una visione della disciplina in cui i concetti stessi sono, per loro natura, dinamici, in movimento.

[1] Châtelet si allinea alla visione Leibniziana, come illustrato in Châtelet (2010): "Un point, pour Leibnitz c'est l'intersection de droites […]. *Il veut faire vivre ces points!:* les sphères commenceront à brûler ou les points commenceront à peser si on sait les capter correctement, non comme des « figures géométriques », mais bien comme des *puissances d'explosion*" (p. 3)

Gli aspetti fin qui discussi ci permettono di iniziare ad apprezzare il movimento in più direzioni, in relazione al pensiero e alla matematica, e costituiscono la base teorica per analizzare l'attività matematica di studenti alle prese con rappresentazioni grafiche di relazioni spazio-temporali.

Metodologia

Lo studio di caso presentato in questo articolo si inserisce in un progetto più ampio descritto in Ferrara, Ferrari & Savioli (2019) e in un progetto di dottorato volto a studiare il ruolo del movimento in matematica. In questo articolo, mi riferisco a una sperimentazione pilota condotta nel 2016 secondo le linee degli interventi "basati sulla classe" (nel senso di Stylianides & Stylianides, 2013), con il duplice scopo di: (1) apportare un miglioramento alle pratiche di classe, proponendo un approccio grafico allo studio di relazioni e funzioni nella scuola primaria e (2) studiare i modi in cui l'utilizzo di una specifica tecnologia che sfrutta il movimento del corpo possa stimolare processi di apprendimento in tale contesto. La sperimentazione ha coinvolto una classe di studenti di classe quarta primaria (8-9 anni) in attività di modellizzazione del movimento con il software WiiGraph.

WiiGraph

WiiGraph[2] è un software per computer che sfrutta due telecomandi della console di gioco Nintendo Wii per catturare le posizioni di due studenti quando questi si muovono in uno spazio di interazione, puntando i telecomandi verso una barra sensore. Quando gli studenti si muovono in questo modo, il software crea in tempo reale i grafici della posizione nel tempo dei due telecomandi (e quindi degli studenti). Ogni grafico cattura la distanza di un telecomando dalla barra e si può scegliere il colore del primo in modo che sia associato

---

[2] WiiGraph è stato progettato e realizzato dal gruppo di ricerca del Center of Research in Mathematics and Science Education della San Diego State University coordinato dal prof. Ricardo Nemirovsky.

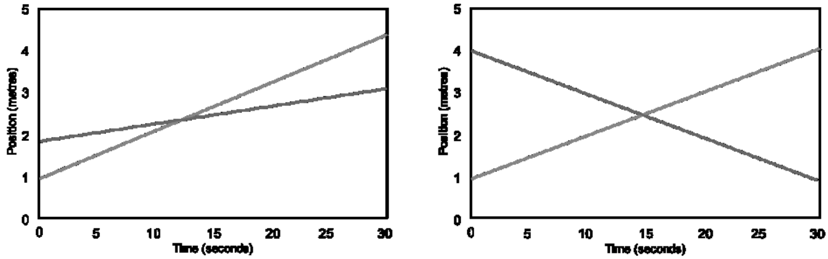
al colore del secondo. I grafici così ottenuti sono dunque grafici di funzione: nella scuola primaria non parleremo direttamente di funzioni con gli studenti, ma si potranno gettare le basi per lo sviluppo del pensiero funzionale, a partire dalle relazioni spazio-temporali così rappresentate. Il sensore funge da origine per il sistema di riferimento cartesiano, così, ad esempio, allontanarsi da esso con velocità costante permette di ottenere una linea crescente (quasi) rettilinea, mentre invece avvicinarsi a esso implicherà sempre la creazione di una linea decrescente.

Nell'aula in cui si è svolto lo studio pilota, lo spazio di interazione di fronte alla barra sensore è stato creato rimuovendo i banchi e disponendo le sedie degli studenti a semicerchio, di fronte allo schermo su cui erano proiettati i grafici. Nel corso di tre incontri, di due ore ciascuno, la sperimentazione didattica ha coinvolto i bambini nell'utilizzo del software durante discussioni collettive guidate da uno dei due ricercatori presenti in classe (un ricercatore esperto e l'autrice), ma anche in lavori di gruppo e attività individuali. L'insegnante della classe è stato osservatore attivo per tutte le attività. Durante le discussioni collettive, due studenti alla volta erano chiamati a "fare un esperimento" con i telecomandi, ovvero a muoversi di fronte al resto della classe, creando così delle rappresentazioni grafiche, direttamente legate ai loro movimenti, sullo schermo.
In una prima fase del lavoro in classe, gli esperimenti hanno permesso l'esplorazione dell'ambiente interattivo e dinamico, e la formulazione di prime ipotesi che legano il movimento e le rappresentazioni grafiche. Dal punto di vista metodologico e didattico, i momenti di sperimentazione con il software sono stati funzionali all'interno della discussione anche per la verifica di congetture che emergevano dalle esplorazioni; la discussione è stata inoltre guidata dal ricercatore stimolando gli studenti alla ricerca di modi di muoversi che permettano di ottenere specifiche *configurazioni* a schermo (per esempio una coppia di rette parallele); infine, si è chiesto agli studenti di prevedere e disegnare i grafici che

si otterrebbero da una coppia di movimenti riprodotti senza la risposta immediata del software, stimolando così processi di immaginazione.
In generale, nell'ottica del laboratorio di matematica (Anichini et al., 2014) queste attività miravano alla creazione di uno spazio di esplorazione matematica ricco in termini di possibilità percettivo-motorie, di interazioni corporee e di costruzione di narrativi e argomentazioni attorno agli esperimenti che coinvolgono gli studenti nella produzione di rappresentazioni matematiche *embodied*. Il lavoro di gruppo su specifiche attività scritte affiancava poi la discussione collettiva, coinvolgendo gli studenti in attività di interpretazione, previsione o creazione di grafici.
Dal punto di vista della metodologia di ricerca, tutti gli incontri sono stati videoregistrati, e i protocolli degli studenti raccolti e analizzati. I video sono stati trascritti e analizzati secondo una metodologia microetnografica (Streeck & Mehus, 2005), che tiene anche in considerazione i micromovimenti del corpo nell'interazione (dal discorso ai gesti, ma anche la postura, gli sguardi, il ritmo, l'attività diagrammatica). Questa scelta è in linea con l'interesse della ricerca verso lo studio del movimento nell'attività matematica. A distanza di circa sei mesi dalla fine della sperimentazione, cinque studenti sono stati intervistati individualmente. Le interviste, della durata di circa 10-15 minuti, erano semi-strutturate con domande volte a stimolare la conversazione informale con uno dei due ricercatori (l'autrice) a proposito delle esperienze fatte nella sperimentazione didattica.
Ci concentreremo qui su una di tali interviste, subito dopo avere descritto in modo più specifico le esperienze più significative dell'intervento didattico.

Linee che si incrociano!

Durante la sperimentazione, lo studio delle relazioni funzionali alla base delle rappresentazioni grafiche è avvenuto passando da esperimenti di esplorazione a esperimenti più focalizzati, finalizzati cioè alla produzione di particolari configurazioni. Ad esempio, per creare rette parallele orizzontali, due bambini devono rimanere fermi a distanze diverse dal sensore, mentre per ottenere rette parallele non orizzontali, devono muoversi in una direzione mantenendo costante la loro velocità così come la loro distanza l'uno dall'altro, durante il movimento. Dare senso alle relazioni tra i movimenti, e dunque alle relazioni che insistono tra i grafici, diventa rilevante nella costruzione di significati di relazioni funzionali. In particolare, WiiGraph cattura le relazioni spazio-temporali per ciascuno degli studenti: dal punto di vista matematico, ogni grafico cattura la relazione tra una variabile (la distanza del telecomando dal sensore) e un'altra, da cui la prima dipende (il tempo). Allo stesso tempo, però, WiiGraph cattura sempre due distanze, ovvero due variabili che variano simultaneamente, senza però dipendere l'una dall'altra. In modo simile, i due movimenti, nello spazio di interazione che generano i grafici, avvengono simultaneamente, ma in modo indipendente. Quindi, possiamo pensare a e stabilire, come nel caso delle rette parallele, relazioni tra grafici, che implicano precise relazioni tra i movimenti che li generano. Sempre nel caso delle rette parallele, gli studenti dovranno quindi muoversi con la stessa andatura, dunque coordinarsi, per poter ricreare una coppia di grafici con le caratteristiche cercate. Non è tanto il "riuscire a coordinarsi" di per sé, quanto il poter discutere di strategie per farlo, così come attribuire nuovi significati, tramite il movimento, a rette tra loro parallele, a essere rilevante per le attività in questione. Allo stesso tempo, una volta stabilita una certa relazione tra i grafici, c'è un intero fascio di rette, quindi di possibili sfumature di movimento (in termini di andatura, punti di partenza del movimento, e così via), che soddisfano quella relazione. Se chiamiamo *coreografie* le coppie di movimenti che avvengono nello spazio di interazione e *configurazioni* le coppie di rette in relazione sullo spazio grafico che corrispondono ai suddetti movimenti, possiamo quindi dire che c’è una *molteplicità di coreografie* che può corrispondere a una *data configurazione*.



a. b.

Figura 1. Due possibili configurazioni per rette che si intersecano

Questo è vero anche nel caso di rette che si intersecano (si vedano i due esempi in Fig. 1). Durante la sperimentazione è emerso che dare senso all’intersezione tra linee è un *pivot* dal punto di vista cognitivo, ossia un elemento attorno al quale il processo risolutivo può dipanarsi e la situazione problematica evolvere verso una soluzione (Ferrara & Robutti, 2002). Infatti, in questo particolare contesto:

- dà senso alla relazione tra i movimenti (incontro di due persone nello spazio di interazione) in analogia con quanto avviene nel piano cartesiano (incontro di due rette che si originano in tempo reale sullo schermo);
- crea la possibilità di pensare al punto nel piano cartesiano come un evento generato da una coppia di linee;
- infine, stimola la visione puntuale del grafico nell’interpretare l’incrocio come l’istante di tempo in cui entrambi gli studenti si trovavano alla stessa distanza dal sensore durante l’esperimento.

Questi aspetti sono tutti di grande rilevanza se pensiamo che trattare questo tipo di rappresentazione non è affatto banale, specialmente nella scuola primaria. Alcuni studi hanno ad esempio evidenziato che è difficile per i bambini dare significato a posizioni differenti rappresentate sul piano cartesiano (ad esempio, Bryant, 2009).

Nella sperimentazione pilota i bambini della classe quarta hanno incontrato per la prima volta una configurazione con una intersezione mentre due studenti cercavano di ottenere due rette parallele non orizzontali. Luca e Giulia (Fig. 2), allontanandosi dal sensore, cercavano di mantenere la stessa andatura. A un certo punto però, hanno perso la loro coordinazione, Giulia ha rallentato e dunque Luca l'ha "raggiunta", così che le due linee prodotte si intersecano. Il resto della classe scoppia in esclamazioni e risate, scatenando poi una ricca discussione con il ricercatore (gli aspetti sopra discussi derivano da un'analisi dettagliata di quanto avvenuto in questa fase). Successivamente, gli studenti hanno discusso e poi creato anche un'altra configurazione che prevede l'intersezione tra rette (Fig. 1b). Mentre il tipo di intersezione generato dai movimenti di Giulia e Luca prevede che, nel movimento, uno debba superare l'altro, muovendosi a una diversa velocità (Fig. 2 e Fig. 1a), per ottenere questa altra configurazione (Fig. 1b) i movimenti devono avvenire in direzioni opposte.

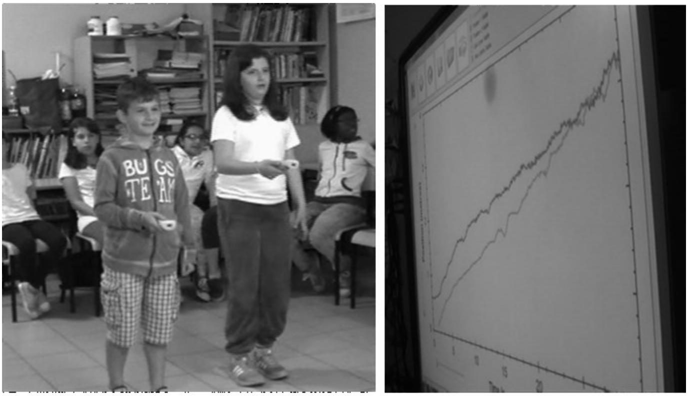


Figura 2. Luca e Giulia; i grafici del loro esperimento

Studio di caso

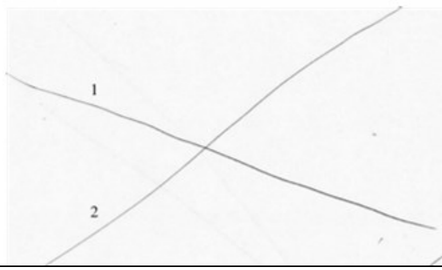
L'intervista di Luca

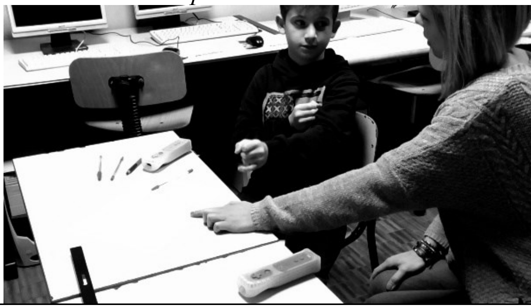
In questo articolo presento e analizzo un breve estratto di una delle interviste condotte nella sperimentazione pilota. Durante l'intervista, proprio Luca argomenta su una domanda della ricercatrice (l'autrice) a proposito del modo in cui è possibile ottenere due linee che si intersecano usando WiiGraph. Nella prima parte dell'intervista, che qui non è presentata, Luca parla della sperimentazione, di quello che lo ha interessato e, più in generale, di ciò che ricorda, a distanza di circa sei mesi dalla fine dell'intervento didattico. Luca è un bambino piuttosto timido e articola alcune frasi con grandi pause, cercando con lo sguardo la ricercatrice. Rivolgendo a Luca dei sorrisi, la ricercatrice incoraggia le sue spiegazioni, indipendentemente dalla correttezza delle sue affermazioni.

Sul tavolo di fronte a Luca ci sono fogli e penne a disposizione, così come due telecomandi e la barra sensore, che però non sono collegati al software. Luca comincia a raccontare che "due bambini si mettevano con i telecomandi e dovevano fare le linee su quel grafico e dovevano puntare il telecomando sul sensore". Subito dopo, riferisce a proposito del caso di linee parallele: "due bambini dovevano andare avanti, mantenendo sempre la stessa distanza […]

tipo tre passi, uno dall’altro”. A questo punto, Luca e la ricercatrice simulano i movimenti impugnando i telecomandi. Dopo pochi minuti, l’intervista si sposta su una nuova configurazione:
(R= ricercatrice, L= Luca)

1. R: E invece… se volessi fare due linee che si incrociano, ad un certo punto?	
2. L: Bisogna che un bambino vada avanti, l’altro va più veloce e poi si devono incontrare... in un punto	*muove velocemente la mano dx verso di sé con impulso,* *muove la mano sx in avanti* *mano dx e sx si avvicinano lentamente* *guarda il ricercatore*
3. R: Proviamo? Come faresti?	*prende in mano un telecomando e lo tiene puntato al sensore*
4. L: Io parto avanti, poi tu vai più veloce, io vado piano e poi si incontrano	*prende l’altro telecomando, poi guarda il telecomando di R* 
5. R: E andiamo tutte e due avanti?	*indica con la mano sx al sensore*
6. L: No, poi si incontrano, poi tu vai avanti e io sto più indietro.	*mano sx si muove prima indietro, poi lentamente in avanti e supera la mano dx* *la mano dx si muove a zig-zag per poi avvicinarsi alla mano sx*
7. R: Ok	

8. L: Quindi, tu fai, tu vai avanti,	*punta con la mano sx al sensore*
9. R: Dammi il via	*rimane ferma con il telecomando*
10. L: Via! Tu fai così, mi superi e io sto dietro	*R e L muovono i telecomandi verso il sensore* *L muove leggermente indietro il telecomando*
11. R: Ok. E come vengono le linee?	*R interrompe il movimento* *L appoggia il telecomando sul tavolo*
12. L: Incrociate	*incrocia le braccia*
13. R: Come?	
14. L: Ehm… Le disegno?	*incrocia nuovamente le braccia, cambiandone di poco l'inclinazione* 
15. R: Sì, sì. Come preferisci	*R appoggia il telecomando*
16. L: Una così e l'altra così (*disegna il diagramma mostrato a fianco, nell'ordine indicato dai numeri*)	
17. R: Allora…	*guarda il disegno, indica una linea*

18. L: Ah no, io parto da davanti e poi io parto da davanti, tu parti da dietro e poi si incrociano	*improvvisamente, chiude i pugni e muove le mani scambiandole di posizione* *indica davanti a sé* *indica più indietro* *improvvisamente, muove di nuovo le mani scambiandone la posizione* 
19. R: Quindi questo disegno è di un altro movimento secondo te?	*indica il disegno*
20. L: Sì	*impugna il telecomando*
21. R: Quindi…	*impugna il telecomando*
22. L: Io parto da davanti, tu da indietro, si incrociano, poi	

Discussione

A un primo sguardo, Luca sembra “confondere” due situazioni che sono entrambe riconducibili a configurazioni di rette che si intersecano. Di fatto, Luca fonde insieme le due configurazioni discusse precedentemente (Fig. 1). Cerchiamo qui di andare oltre questa specifica osservazione, esaminando i modi e i movimenti con

cui emergono le differenti configurazioni. In particolare, focalizziamo l'attenzione sull'ambiguità che sembra sorgere dal fatto che le due possibilità convivono e sono entrambe modi corretti di approcciare la situazione problematica posta dal ricercatore. Tutte e due le coreografie evocate da Luca con i gesti e le parole si riferiscono a rette che hanno un punto di intersezione. Quello che pare destabilizzare la prima proposta è il diagramma, che genera un'altra coreografia e un'altra configurazione ancora. Un primo aspetto rilevante è dunque il fatto che, nel contesto di riferimento, che implica l'utilizzo di WiiGraph, appare essere più prominente la relazione tra i due movimenti piuttosto che il comune punto di riferimento, ovvero le coppie di grafici piuttosto che il fatto che esse siano immerse nel piano cartesiano. Dal punto di vista cognitivo, questo mette in secondo piano il sistema di riferimento che formalizza i due grafici, per privilegiare la dimensione generativa della creazione dei due grafici e delle relazioni che sussistono tra di essi.
Queste relazioni sono esse stesse dinamiche e sono catturate dai movimenti che caratterizzano le differenti coreografie di Luca e della ricercatrice. Nell'episodio presentato, è infatti interessante notare che, quando Luca immagina e ricrea configurazioni e particolari coreografie, sono piccole variazioni a caratterizzare i diversi momenti. Possiamo osservare come le variazioni si dipanano lungo diverse dimensioni qualitative. I movimenti avvengono all'incirca sempre su una traiettoria lineare in direzione della barra sensore, ma sono soggetti a zig-zag [6] che enfatizzano le relazioni tra i telecomandi, impulsi [2] e rallentamenti [2;6], in generale variazioni più o meno improvvise che marcano il passaggio da una possibilità a un'altra (come ad esempio il vincolo di "restare dietro" all'altro, o il muoversi a una velocità maggiore o inferiore). La tensione stessa con cui le braccia sono incrociate a mostrare la configurazione [14] (difficilmente evocabile dall'immagine o da una descrizione dettagliata) o il cambiamento di ampiezza tra una coreografia e la successiva dettano parzialmente il ritmo dell'intervista, gettano luce sulle pieghe che costituiscono la molteplice natura dell'interazione

corporea nell'episodio. Focalizzarci su come queste piccole variazioni avvengano e si dispieghino ci permette di notare come il pensiero sia come avvolto nelle sfumature che si creano nel e a partire dal movimento.
D'altro canto, in questo episodio emerge come, nell'immaginare e ricreare i movimenti e i relativi grafici, l'immersione nel piano cartesiano è esperita e catturata allo stesso tempo in termini di movimenti relativi e coordinati e in termini di linee che sono potenzialmente mobili, modificabili e dinamiche. Questo aspetto risuona profondamente con la prospettiva di Châtelet sulla virtualità dei concetti matematici, oltre a suggerire che la gestualità presentata in questo episodio non è meramente un atto di rappresentazione di qualcosa che è già stato appreso. Piuttosto, alla luce delle riflessioni teoriche proposte in questo lavoro, i gesti che catturano il movimento relativo discusso nell'intervista, evocano l'evento di rette che si intersecano in una molteplicità di modi. In questo senso, i movimenti sono generativi di significati matematicamente rilevanti e le rette che questi movimenti generano non sono statiche, ma sono oggetti matematici che vibrano e sono soggetti a modificazioni, alterazioni e relazioni.

Conclusioni

Lo studio di caso presentato si riferisce a un breve episodio di una sperimentazione pilota condotta in una classe di scuola primaria, ma sono state progettate e realizzate sperimentazioni didattiche a più livelli scolari seguendo lo stesso impianto metodologico. Per questo motivo, le riflessioni che propongo qui di seguito non si riferiscono specificatamente al primo ciclo, ma vogliono invece proporre alcuni spunti per la pratica didattica più in generale.

Riflessioni per la didattica della matematica

Nell'articolo si è fatto riferimento a uno strumento matematico, WiiGraph, che permette di modellizzare per via grafica il movimento di due studenti. Abbiamo perciò affrontato l'importanza che questo genere di attività, accanto a un approccio che valorizzi il movimento in matematica e la mobilità dei concetti, può avere nello sviluppo del concetto di funzione (per i dettagli, si rimanda nuovamente a Ferrara et al., 2019). In particolare, nel caso di WiiGraph, è la possibilità di lavorare con coppie di grafici e dunque sulle relazioni tra movimenti corrispondenti ad avere ispirato la progettazione delle attività, finalizzate alla scoperta e allo studio di relazioni spazio-temporali.

Il lavoro ha posto l'accento sull'importanza che attività di modellizzazione del movimento possono ricoprire per introdurre il tema delle relazioni e funzioni già nel segmento della scuola primaria.

Le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo (MIUR, 2012), del resto, sottolineano l'importanza di sviluppare competenze sulla rappresentazione e sull'interpretazione di relazioni utilizzando opportune rappresentazioni, anche finalizzate alla formulazione di giudizi e alla presa di decisioni. Questo obiettivo è spesso disatteso nella pratica di classe, ma è di fondamentale rilevanza, fin dalla scuola primaria e, nell'ottica di una didattica elicoidale, in verticale, per i segmenti scolastici successivi. Gli aspetti di pensiero funzionale sono inoltre particolarmente rilevanti alla luce delle osservazioni epistemologiche che sono state offerte a partire dal lavoro di Châtelet, in particolare sulle relazioni tra concetti matematici e sul loro profondo dinamismo. Per l'insegnamento e apprendimento della matematica, tale prospettiva offre una visione della matematica che non è statica, fissa e astratta, ma piuttosto mobile, vivace, potenziale.

Dal punto di vista del ricercatore, l'articolo ha posto attenzione alle sfumature dell'idea di movimento non per giustificare le azioni, ma per rendere più esplicita la complessità del movimento e portare in superficie la dimensione qualitativa dell'essere in movimento. Per il docente, uno spunto importante è quindi quello di riconsiderare il movimento come significativo di per sé, anche nella e per la costruzione di significati matematici.

In conclusione, in relazione alla tematica di ricerca che l'articolo ha esplorato, l'idea del "pensare in movimento" non è funzionale per evidenziare o rendere esplicito il pensiero matematico di uno studente, ma piuttosto vuole gettare luce sulla dimensione in cui il pensiero manifesta se stesso, cioè non solamente attraverso il discorso, ma anche e soprattutto attraverso il movimento.

Note e ringraziamenti

Questo articolo è un parziale riadattamento di un report di ricerca presentato al convegno PME 42 e pubblicato nei relativi atti: Ferrara, F. & Ferrari, G. (2018). Thinking in movement and mathematics: A case study. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 419–426). Umeå, Sweden: PME. Si ringraziano: Francesca Ferrara, per i preziosi consigli offerti nella rielaborazione dell'articolo originale; i due revisori per i suggerimenti forniti col loro referaggio.

Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (Eds.). (2004). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica (ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni Stampatore.

Arzarello F., Robutti O. (2009). Embodiment e multimodality nell'apprendimento della matematica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. *32A-B*(3), 243–268.

Bryant, P. (2009). Understanding Space and its Representation in Mathematics. In T. Nunes, P. Bryant & A. Watson (Eds.), *Key Understandings in Mathematics Learning*. London: Nuffield Foundation. Online: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P5.pdf

Châtelet, G. (1993/2000). *Les enjeux du mobile*. Paris: Seuil (English Transl. by R. Shore & M. Zagha, *Figuring Space: Philosophy, Mathematics and Physics*. Dordrecht: Kluwer, 2000).

Châtelet, G. (2010). L'enchantement du virtuel. *Chimères, 2*, 1-20.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom.* New York: Cambridge University Press.

de Freitas, E., & Ferrara, F. (2015). Movement, memory and mathematics: Henry Bergson and the ontology of learning. *Studies in Philosophy and Education*, *34*(6), 565–585.

Ferrara, F. (2014). How multimodality works in mathematical activity: Young children graphing motion. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4), 917–939.

Ferrara, F. & Robutti, O. (2002). Approaching graphs with motion z Anglia.

Ferrara, F. & Seren Rosso, M. (2015). Embodiment e multimodalità nella classe di matematica: Sviluppi e riflessioni recenti. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 38A-B*(3), 321–342.

Ferrara, F., Ferrari, G. & Savioli, K. (2019). Matematica in Movimento: radici, sviluppi e implicazioni di un approccio grafico al concetto di funzione tramite i sensori. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 42A*(1), 29–60.

MIUR. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma, DM. 16 novembre 2012.

Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91–95.

Roth, W.-M., & Mahuex, J-F. (2015). The stakes of movement: A dynamic approach to mathematical thinking. *Curriculum Inquiry, 45*(3), 266–284.

Sheets-Johnstone, M. (2009). Animation: the fundamental, essential, and properly descriptive concept. *Continental Philosophy Review, 42*(3), 375–400.

Sheets-Johnstone, M. (2011). *The Primacy of Movement* (2nd Ed.). Amsterdam: Benjamins.

Streeck, J., & Mehus, S. (2005). Microethnography: The study of practices. In K. L. Fitch & R. E. Sanders (Eds.), *Handbook of Language and Social Interaction* (pp. 381–404). Mahwah: Erlbaum.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 43*(3), 333–341.